УДК 536.244

АНАЛІЗ ТЕЧІЇ ТА ТЕПЛООБМІНУ В ПОГРАНИЧНОМУ ШАРІ РІДИНИ З СУТТЄВОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ В'ЯЗКОСТІ ВІД ТЕМПЕРАТУРИ

Тимошенко А.В., канд. техн. наук, Дмитренко Н.П., канд. техн. наук,
Ковецька М.М., канд. техн. наук.

Інститут технічної теплофізики НАН України, вул. Желябова, 2а, Київ, 03680, Україна

<https://doi.org/10.31472/ihe.4.2018.02>

Представлено результати досліджень теплообміну та гідродинаміки у пограничному шарі на плоскій пластині при течії рідини, в'язкість якої суттєво залежить від температури. Визначено умови формування малорухомого шару рідини біля стінки.

Представлены результаты исследования теплообмена и гидродинамики в пограничном слое на плоской пластине при течении жидкости, вязкость которой существенно зависит от температуры. Определены условия формирования малоподвижного слоя жидкости возле стенки.

The results of the study for heat transfer and fluid flow in the boundary layer over in case, when viscosity substantially depends on temperature, are presented. The conditions for the formation of a low-mobility fluid layer near the wall are determined.

Бібл. 13, рис. 5.

Ключові слова: теплообмін, розплав базальту, пограничний шар, пластина, залежність в'язкості рідини від температури.

T – температура;
 U – швидкість;
 u – поздовжня компонента швидкості;
 v – поперечна компонента швидкості;
 x – поздовжня координата;
 y – поперечна координата;
 c_p – теплоємність;
 ρ – густина;

μ – динамічний коефіцієнт в'язкості;
 λ – коефіцієнт теплопровідності;
 q – інфінітезимальний генератор.

Нижні індекси:

w – умови на стінці;
 ∞ – умови на зовнішній границі пограничного шару.

Вступ

Широке впровадження нової екологічно безпечної, довговічної і пожежостійкої теплової ізоляції на основі базальтового супертонкого волокна (БСТВ) в значній мірі пов'язане з системною інтенсифікацією технологічних процесів, яка складає основу підвищення їх енергетичної ефективності. Завдяки їй можна буде в півтора – два рази зменшити витрати природного газу і електроенергії при виробництві теплоізоляції, а також досягнути зниження витрат енергоносіїв на опалення будівель та споруд, шляхом істотного підвищення їх теплоутримуючих властивостей.

На сьогодні переважна частина теплоізоляційних матеріалів є цілком синтетичними (полімерними та полімеровмісними), або містять у своєму складі зв'язуючі речовини синтетичного походження [1]. Щодо протипожежних вимог, то навіть винесення теплоізоляційного шару назовні не є ефективним і призводить до істотного зниження пожежостійкості споруд, особливо багатоповерхових. Саме через теплоізоляційні матеріали пожежі приймають катастрофічний характер і супроводжуються загибеллю людей, насамперед через отруєння токсичними газоподібними речовинами, які виділяються з теплоізоляційних матеріалів, навіть якщо

вони і не горять, а лише піддаються нагріванню. При цьому для отруєння людей газами достатньо присутності у складі теплоізоляційних матеріалів лише синтетичних зв'язуючих речовин. Останнім часом почастишали випадки потужних пожеж у нових багатоповерхових спорудах [2]. Водночас існують теплоізоляційні матеріали, які здатні при їх застосуванні у спорудах, істотно підвищити вогнестійкість споруд. Саме до таких матеріалів належить теплоізоляція на основі надтонкого базальтового волокна.

Властивості українських базальтів виключно перспективні для вироблення надтонкого базальтового волокна через: а) оптимальний мінералогічний склад; б) низьку (відносно іншої базальтової сировини) температуру плавлення; в) широкий температурний діапазон меж кристалізації базальтового скла. Крім того, базальтові кар'єри присутні у різних регіонах України [3, 4].

Дуплекс-технологія виготовлення базальтового волокна включає дві стадії термообробки сировини. Перша стадія відповідає за підігрів, плавлення, дегазацію та гомогенізацію розплаву. При цьому викопна порода, що характеризується певним хімічним та мінералогічним складом, перетворюється в аморфний розплав. Процес вважається тим більш довершеним, чим більш

однорідні та ізотропні кінцеві властивості розплаву. Значний вплив на кінцеві властивості розплаву мають умови течії та теплообміну в ванні та фідері плавильної печі.

Мета роботи полягає в визначенні впливу в'язкості розплаву на течію та теплообмін в пограничному шарі на плоскій поверхні та умов формування малорухомого шару рідини поблизу стінки.

Розглядається теплообмін при течії розплаву базальту в ламінарному пограничному шарі на плоскій поверхні. В'язкість розплаву базальту є нелінійною функцією, що суттєво залежить від температури [5] (рис.1).

Рис. 1. Залежність коефіцієнту динамічної в'язкості від температури для скла з базальту родовища Іванова Долина.

Математична модель

Розглядається стаціонарна задача течії і теплообміну в пограничному шарі рідини на плоскій поверхні. Вихідна система рівнянь гідродинаміки та теплообміну в пограничному шарі на плоскій пластині в двовірному наближенні [6]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Рівняння (1) – (3) аналізуються при наступних граничних умовах

$$u = v = 0, \quad T = T_w \quad \text{в } y = 0 \quad (4)$$

$$u = U_\infty, \quad T = T_\infty \quad \text{в } y \rightarrow \infty \quad (5)$$

Для вирішення системи диференціальних рівнянь з частковими похідними (1) – (3), перетворимо їх до звичайних диференціальних рівнянь. З цією метою застосуємо аналіз симетрій (аналіз груп Лі) [7]. Алгоритм використання аналізу симетрій для задач тепломасообміну та гідродинаміки наведено в [8-12].

Симетрії системи (1) – (3) можуть бути описані інфінітезимальним генератором

$$q = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} + \phi_1 \frac{\partial}{\partial u} + \phi_2 \frac{\partial}{\partial v} + \phi_3 \frac{\partial}{\partial T} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \rho} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial \mu} + \zeta_3 \frac{\partial}{\partial c_p} + \zeta_4 \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad (6)$$

де вирази для коефіцієнтів $\xi_1, \xi_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ подаються нижче.

Для знаходження симетрій системи диференціальних рівнянь в часткових похідних (1) – (3) повинна застосовуватись наступна умова

$$pr^{(2)}q(\Delta) = 0, \quad (7)$$

де $pr^{(2)}q(\Delta)$ друге продовження інфінітезимального генератора (6), символ Δ визначає систему диференціальних рівнянь в часткових похідних (1) – (3).

Друге продовження інфінітезимального генератора q (6) визначається у відповідності з наступним виразом

$$pr^{(2)}q = q + \phi_1^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi_1^y \frac{\partial}{\partial u_y} + \phi_1^{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \phi_2^y \frac{\partial}{\partial v_y} + \phi_3^x \frac{\partial}{\partial T_x} + \phi_3^y \frac{\partial}{\partial T_y} + \phi_3^{yy} \frac{\partial}{\partial T_{yy}}, \quad (8)$$

де індекси при u, v, T являють собою часткові похідні по відповідним змінним. Коефіцієнти $\phi_1^x, \phi_1^y, \phi_1^{yy}, \phi_2^y, \phi_3^x, \phi_3^y, \phi_3^{yy}$ являють собою функції від $\xi_1, \xi_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, u, v, T$ та їх похідних по x, y . Застосування оператора $pr^{(2)}q$ до кожного рівняння системи (1) – (3) (у відповідності з умовою (7)) приводить до двох рівнянь. Ці рівняння містять одночлени з різними комбінаціями похідних по u, v, T . Далі, коефіцієнти при одночленах, які містять тотожні комбінації похідних по u, v, T прирівнюються. В результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь в часткових похідних від $\xi_1, \xi_2, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$.

Рішення цієї системи складається з двох симетрій (двох підалгебр Лі). Після подальших перетворень алгебр Лі система (1) – (3) може бути остаточно представлена, як

$$q_1 = \frac{\partial}{\partial x} + F_1(x) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dF_1(x)}{dx} u \frac{\partial}{\partial v}, \quad (9)$$

$$q_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} y + F_2(x) \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{dF_2(x)}{dx} u - \frac{1}{2} v \right) \frac{\partial}{\partial v}, \quad (10)$$

де $F_1(x), F_2(x)$ – довільні гладкі функції.

Найбільш зручною симетрією для одержання автомодельних змінних є друга підалгебра Лі q_2 (10), оскільки вона не містить перетворень по u , T , ρ , μ , c_p , λ . Крім того, симетрію (10) слід скорегувати з урахуванням функціональної залежності $\mu = \mu(T)$, а одержані автомодельні функції цих змінних не містять параметричних змінних, наприклад функції координати x . Це також відноситься до автомодельних функцій u та T . Єдина автомодельна функція, що містить параметричну змінну, це $v(x, y)$, оскільки $v(x, y)$ входить в інфінітезимальний генератор (10). Можна знайти форму автомодельної функції V з рівняння (10), використовуючи наступне співвідношення

$$x \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{2} v \frac{\partial V}{\partial v} = 0. \quad (11)$$

Рішення рівняння (11) дає

$$v \sim \frac{v(\eta)}{\sqrt{x}}, \quad (12)$$

де η – автомодельна змінна, що також може бути знайдена з рівняння (10) використовуючи вираз

$$x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} y \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \quad (13)$$

Інтегрування рівняння (13) призводить до наступного рішення

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_{\infty} \rho}{\mu_{\infty} x}}. \quad (14)$$

Параметр $\left(\frac{U_{\infty} \rho}{\mu_{\infty}}\right)$ в рівнянні (14) застосовується тільки для параметризації автомодельної змінної. Точний вигляд функціональної залежності (12) одержується з рівняння нерозривності та наводиться нижче. Аналіз автомодельних форм проведено при умові $F_2(x) = 0$. Функція $F_2(x)$ описує принцип перенесення Прандтля [13] та може бути використана при аналізі потоку над поверхнею з змінною геометрією. Оскільки поверхня, що розглядається плоска, то значення $F_2(x)$ дорівнює 0.

При рішенні задачі густина середовища приймається постійною. Швидкість u , в автомодельних змінних, представляємо у вигляді

$$u = U_{\infty} f'(\eta). \quad (15)$$

Похідна $f'(\eta)$ використовується для зручності інтегрування рівняння нерозривності (1), при визначенні автомодельної форми для швидкості v . Після інтегрування одержуємо залежність для швидкості v у вигляді

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_{\infty} \cdot \mu_{\infty}}{\rho \cdot x}} (f'(\eta) \cdot \eta - f(\eta)). \quad (16)$$

Вводимо автомодельну функцію для температури

$$T = T_{\infty} - (T_{\infty} - T_w) \cdot \Theta(\eta) \quad (17)$$

та підставляємо рівняння (14) – (17) в рівняння (1) – (3), і одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь в автомодельній формі

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot f(\eta) \cdot f''(\eta) + M'[\Theta(\eta)] \cdot \Theta'(\eta) \cdot f''(\eta) + \\ + M[\Theta(\eta)] \cdot f^{(3)}(\eta) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} \cdot Pr_{\infty} \cdot f(\eta) \cdot \Theta'(\eta) + \Theta''(\eta) = 0. \quad (19)$$

Залежність динамічного коефіцієнта в'язкості рідини від температури описується рівнянням

$$\mu(T) = 3,83 \cdot 10^{-3} \cdot e^{\frac{2,41 \cdot 10^6}{(T)^7}}. \quad (20)$$

В автомодельній формі рівняння (20) представляємо у вигляді

$$\mu(\Theta(\eta)) = \mu_{\infty} \cdot M[\Theta(\eta)], \quad (21)$$

де μ_{∞} – в'язкість рідини за межами пограничного шару.

Система рівнянь (18), (19) вирішується при наступних граничних умовах

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \Theta(0) = 1 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \quad (22)$$

$$f'(\infty) = 1, \quad \Theta(\infty) = 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty \quad (23)$$

Результати досліджень

На основі системи рівнянь (18), (19) з граничними умовами (22), (23) виконано чисельне моделювання руху рідини та теплообміну в граничному шарі над плоскою поверхнею в широкому діапазоні зміни параметрів μ та Θ . Чисельні рішення одержувались за допомогою програмних продуктів MAPLE та Mathematica. На рисунках 2, 3 представлено результати розрахунків безрозмірного профілю швидкості в пограничному шарі в залежності від різниці між температурою стінки і температурою рідини на зовнішній границі шару. Значна залежність в'язкості рідини від температури істотно впливає на розподіл швидкості в пограничному шарі. Зі збільшенням різниці температур (зменшенням температури стінки) збільшується пристінна область з нульовим значенням швидкості. Більш детально визначення границі малорухомої області показано на рис. 3. Таким чином можливо визначити граничне значення температури стінки при заданій температурі рідини на границі

пограничного шару, нижче якої формується малорухо- мий шар рідини.

На рис. 4 представлено безрозмірні профілі тем- ператури рідини в пограничному шарі при постійній температурі рідини на його зовнішній границі $1450\text{ }^{\circ}\text{C}$ і для різних значень температури стінки.

Зі зменшенням температури стінки збільшується товщина температурного пограничного шару і профіль температури наближається до лінійного.

Встановлено, що для умов течії близьких до ізо- термічних, друга похідна автомодельної функції на стін-

ці відрізняється від свого значення при ізотермічному русі не більше ніж на 1%, результати добре узгоджу- ються з відомим рішенням Блазіуса. В умовах неізо- термічної течії, величина другої похідної автомодель- ної функції на стінці зменшується і наближається до 0 (рис. 5).

Приймаємо, що зростання малорухливого шару рі- дини (гарнісажного шару) починається при температурі на стінці, для якої величина другої похідної автомо- дельної функції становить 1% від своєї величини для ізотермічної течії. Відповідно до умов дослідження критична температура на стінці відповідає величині $1088\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Рис. 2. Розподіл швидкості в пограничному шарі при: 1 – $t_w = 900\text{ }^{\circ}\text{C}$; 2 – $1100\text{ }^{\circ}\text{C}$; 3 – $1449\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_{\infty} = 1450\text{ }^{\circ}\text{C}$; $Pr = 5180$.

Рис. 4. Розподіл температури в пограничному шарі при: 1 – $t_w = 900\text{ }^{\circ}\text{C}$; 2 – $1100\text{ }^{\circ}\text{C}$; 3 – $1449\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_{\infty} = 1450\text{ }^{\circ}\text{C}$; $Pr = 5180$.

Рис. 3. Розподіл швидкості в пограничному шарі при: 1 – $t_w = 900\text{ }^{\circ}\text{C}$; 2 – $1100\text{ }^{\circ}\text{C}$; 3 – $1449\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_{\infty} = 1450\text{ }^{\circ}\text{C}$; $Pr = 5180$.

Рис. 5. Залежність другої похідної автомодельної функції від температури на стінці.

Висновки

Розглянуто теплообмін при течії розплаву базальту в ламінарному пограничному шарі на плоскій поверхні. Розроблено математичну модель гідродинаміки і теплообміну при течії рідини з сильною залежністю надвисокої в'язкості від температури.

На основі розробленої математичної моделі одержано нові закономірності течії і теплообміну аномально високов'язкої рідини при температурах 900...1450 °С. Визначено умови формування малорухомого шару рідини біля твердої поверхні. Встановлено вплив величини малорухомого шару рідини на розподіл температури в пограничному шарі розплаву.

Отримані результати дозволяють скорегувати температурні режими в плавильній печі і удосконалити процес виготовлення надтонких базальтових волокон.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Теплоизоляция*. Материалы, конструкции, технологии: Справочное пособие / Гл. ред. С.М. Кочергин. – М.: Стройинформ. – 2008. – 440 с.
2. *Information on* <http://www.bbc.com/russian/news-40366259>
3. *Минерально-сырьевая база горных пород Украины для производства волокон*. Аналитический обзор / В.И. Трефилов, М.Ф. Махова, Д.Д. Джигирис [и др.] // Промышленность строительных материалов. Серия 6. Промышленность полимерных, мягких кровельных и теплоизоляционных строительных материалов. – 1992. – Выпуск 2. – С. 88.
4. *Джигирис Д.Д., Махова М.Ф.* Основы производства базальтовых волокон и изделий. – М.: Теплоэнергетик. – 2002. – 416 с.
5. *Полевой П.П.* Теплообменные процессы при получении волокна раздувом минеральных нитей высокотемпературными газовыми потоками. Дисс. ... канд. техн. Наук. Киев. – 1982. – 193 с.
6. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Наука. – 1969. – 387 с.
7. *Авраменко А.А., Басок Б.И., Кузнецов А.В.* Групповые методы в теплофизике. – Киев: Наукова думка. – 2003. – 484 с.
8. *Avramenko A. A., Blinov D. G., and Shevchuk I. V.* (2011). Self-similar analysis of fluid flow and heat-mass transfer of nanofluids in boundary layer. *PHYSICS OF FLUIDS* 23, 082002 (2011).
9. *Avramenko A. A., Kobzar S.G., Shevchuk I.V., Kuznetsov A.V., Iwanisov L.T.* Symmetry of turbulent boundary layer flows: Investigation of different eddy viscosity models // *Acta Mechanica*. – 2001. – 151, N 1-2. – P.1-14.
10. *Avramenko A. A., Blinov D. G., Shevchuk I. V., Kuznetsov A. V.* Symmetry analysis and self-similar forms of fluid flow and heat-mass transfer in turbulent boundary layer flow of a nanofluid // *Phys. Fluids*. – 2012. – 24. – P. 092003-1 – 092003-20.
11. *Avramenko A. A., Shevchuk I. V., Abdallah S., Blinov D. G., Harmandd S., Tyrinov A. I.* Symmetry analysis for film boiling of nanofluids on a vertical plate using a nonlinear approach // *Journal of Molecular Liquids*. – 2016. – 223. – P. 156 – 164.
12. *Avramenko A. A., Shevchuk I. V., Abdallah S., Blinov D. G., Tyrinov A. I.* Self-similar analysis of fluid flow, heat, and mass transfer at orthogonal nanofluid impingement onto a flat surface // *Phys. Fluids*. – 2017. – 29. – P. 052005-1 – 052005-11.
13. *Maxwell J. C.* Treatise on Electricity and Magnetism (Oxford University Press, London, 1904).

ANALYSIS OF FLOW AND HEAT TRANSFER IN THE BOUNDARY LAYER OF FLUID WITH ESSENTIAL DEPENDENCE OF VISCOSITY FROM TEMPERATURE

Timoshchenko A.V., Dmitrenko N.P., Kovetska M.M.

*Institute of Engineering Thermophysics of National
Academy of Sciences of Ukraine, Zhelyabova str., 2a, Kyiv,
03680, Ukraine*

<https://doi.org/10.31472/ihe.4.2018.02>

The introduction of new environmentally safe, durable and fire-resistant thermal insulation based on basalt fiber requires the improvement of technological processes for the production of basalt filaments in order to increase their energy efficiency. The quality of basalt fiber significantly depends on the properties of the basalt melt in the process. The process is considered to be more perfect than the more homogeneous and isotropic final properties of the melt. The conditions of flow and heat transfer in the bath and feeder of the melting furnace have a significant impact on the final properties of the melt.

The paper presents the results of studies of heat transfer in the boundary layer on a flat plate with the flow of a liquid, the viscosity of which depends significantly on temperature. The system of differential equations, which describes the steady-state flow regime, is solved using symmetry analysis (analysis of Lie groups).

On the basis of the developed mathematical model, new results were obtained which characterize the regularities of the flow and heat exchange of a highly viscous fluid in the range of temperature variations from 900 to 1450 °C. The conditions for the formation of a low-mobility layer of liquid near a solid surface are determined. The influence of the value of a low-mobility fluid layer on the temperature distribution in the boundary layer of basalt melt is established.

The results obtained allow us to adjust the temperature regimes in the melting furnace and improve the process of manufacturing ultrathin basalt threads.

References 13, Figures 5.

Key words: heat exchange, basalt melts, boundary layer, plate, dependence of the viscosity of the liquid on temperature.

1. Kochergin S.M. *Teploizolyaciya*, [Heat insulation], Materialy, konstrukcii, tekhnologii: Spravochnoe posobie M.: Strojinform. 2008, 440 p. (in Rus.)

2. *Information* on <http://www.bbc.com/russian/news-40366259>

3. Trefilov V.I., Mahova M.F., Dzhigiris D.D. Mineral'no-syr'evaya baza gornyh porod Ukrainy dlya proizvodstva volokon. Analiticheskij obzor, [Mineral and raw material base of rocks of Ukraine for the production of fibers. Analytical review], Promyshlennost' stroitel'nyh materialov. Seriya 6. [Industry building materials. Series 6], 1992. №6. 88p. (in Rus.)

4. Mahova M.F., Dzhigiris D.D. Osnovy proizvodstva bazal'tovyh volokon i izdelij, [Basics of basalt fiber production and products]. M.: Teploehnergetik, 2002. 416 p. (in Rus.)

5. Polevoj P.P. Teploobmennye processy pri poluchenii volokna razduvom mineral'nyh nitej vysokotemperaturnymi gazovymi potokami, [Heat transfer processes in the production of fiber blown mineral fibers by high-temperature gas flows] Kiev: Diss. kand. Nauk, 1982. – 193 p. (in Rus.)

6. Shlihting G. Teoriya pogranichnogo sloya, [The theory Boundary layer] – M.: Nauka, 1969. 387 p. (in Rus.)

7. Avramenko A.A., Basok B.I., Kuznetsov A.V. Gruppy metody v teplofizike, [Group methods in thermal physics]. Kiev. Naukova dumka, 2003. 484 p. (in Rus.)

8. Avramenko A. A., Blinov D. G., and Shevchuk I. V. Self-similar analysis of fluid flow and heat-mass transfer of nanofluids in boundary layer. Physics of fluids. 2011. V. 23(8): 082002.

9. Avramenko A. A., Kobzar S.G., Shevchuk I.V., Kuznetsov A.V., Iwanisov L.T. Symmetry of turbulent boundary-layer flows: Investigation of different eddy viscosity models. Acta Mechanica. 2001. V.151(1-2). P.1 – 14.

10. Avramenko A. A., Blinov D. G., Shevchuk I. V., Kuznetsov A. V. Symmetry analysis and self-similar forms of fluid flow and heat-mass transfer in turbulent boundary layer flow of a nanofluid. Phys. Fluids. 2012. V. 24. P. 092003-1 – 092003-20.

11. Avramenko A. A., Shevchuk I. V., Abdallah S., Blinov D. G., Harmandd S., Tyrinov A. I. Symmetry analysis for film boiling of nanofluids on a vertical plate using a nonlinear approach. Journal of Molecular Liquids. 2016. V. 223. P. 156 – 164.

12. Avramenko A. A., Shevchuk I. V., Abdallah S., Blinov D. G., Tyrinov A. I. Self-similar analysis of fluid flow, heat, and mass transfer at orthogonal nanofluid impingement onto a flat surface. Phys. Fluids. 2017. V. 29. P. 052005-1 – 052005-11.

13. Maxwell J. C. Treatise on Electricity and Magnetism (Oxford University Press, London, 1904).

Отримано 30.10.2018

Received 30.10.2018