УДК: 532.536

ТЕПЛООБМІН В ГРАДІЄНТНИХ ЛАМІНАРНИХ ТЕЧІЯХ

Авраменко А.О., член-кореспондент НАН України, Тирінов А.І., докт. техн. наук,
Дмитренко Н.П., канд. техн. наук., Ковецька Ю.Ю., докт. філософії

Інститут технічної теплофізики НАН України, вул. М. Капніст 2а, м. Київ 03680, Україна

<https://doi.org/10.31472/ttpe.3.2021.4>

Представлены результаты использования теории групп симметрии дифференциальных уравнений для решения задачи теплообмена в пограничном слое ламинарных несжимаемых потоков.

Приведено результати використання теорії груп симетрії диференціальних рівнянь для розв'язання задачі теплообміну в пограничному шарі ламинарних нестислих потоків.

The results for application symmetry groups for solving the problem of heat transfer in the boundary layer of laminar incompressible flows are presented.

Бібл. 15.

Ключові слова: теплообмін, ламінарний пограничний шар, теорія груп симетрії.

Γ – гама-функція;
 a – температуро провідність;
 p – тиск;
 q – інфінітезимальний генератор;
 T – температура;
 u, v – компоненти швидкості;
 U_∞ – швидкість на зовнішній межі пограничного шару;
 x, y – декартові координати;
 ν – кінематична в'язкість;
 ρ – густина;

Безрозмірні параметри:

Nu – число Нуссельта;

Pr – число Прандтля;

Re – число Рейнольдса.

Індекси нижні:

w – стінка;

∞ – на межі пограничного шару.

Вступ

Використання групового аналізу для дослідження диференціальних рівнянь дозволяє врахувати всі можливі варіанти рішень, виявити нюанси фізичних процесів [1]. Симетрії диференціальних рівнянь, що описують той чи інший фізичний процес, тісно пов'язані із властивостями автомодельності. Це дозволяє перетворити систему диференціальних рівнянь в часткових похідних у звичайні диференціальні рівняння або зменшити кількість незалежних змінних [2]. В роботі [3] використано груповий аналіз для отримання автомодельних рішень рівнянь ламінарного і турбулентного пограничного шару. Результати використання груп Лі для дослідження процесів нестационарного теплообміну при обтіканні сфери в області малих чисел Рейнольдса представлено в роботі [4].

В роботі [5] показано результати досліджень змішаної конвекції в вертикально орієнтованому мікроканалі з граничними умовами проковзування на стінках. Розв'язок задачі отримано аналітично на основі групового аналізу та чисельно на основі решітчастого методу Больцмана (LBM). Отримано співвідношення, що дозволяють виз-

начити профілі швидкості і температури, а також число Нуссельта як функції чисел Кнудсена, Рэлея і Прандтля. В роботах [6,7] представлено результати досліджень нестационарної течії нестисливої рідини в мікроканалах на основі аналізу симетрії при раптовому падінні тиску. Отримано нестационарні профілі швидкості, визначено умови переходу до повністю розвинутої течії.

Робота [8] присвячена дослідженню нестійкості потоку нанорідини в криволінійних каналах, що обмежені двома концентричними циліндрами. Показано вплив концентрації наночастинок і числа Шмідта на стійкість потоку при позитивних і негативних температурних градієнтах. В роботі [9] представлено результати моделювання процесів переносу теплоти, імпульсу і концентрації наночастинок в рідині в разі її стабільного плівкового кипіння біля вертикальної нагрітої поверхні. Отримано автомодельні форми змінних і диференціальних рівнянь для нанорідини за допомогою теорії груп Лі. Модель враховує ефекти броунівської і термофоретичної дифузії. Показано вплив концентрації наночастинок на теплопередачу.

На основі групового методу виконано аналіз лінійної нестійкості в задачі біоконвекції в сусп. зі гіротаксичних мікроорганізмів [10]. Визначено умови стабілізації системи.

Наведений короткий огляд робіт свідчить, що використання групових методів дає можливість отримати аналітичні рішення різних задач теплообміну при течіях в пограничному шарі.

Математична модель та симетрії

Розглянемо приклад використання групового аналізу для розв'язання задач теплообміну в без градієнтному стаціонарному пограничному шарі за умови відсутності дисипації енергії.

Система рівнянь стаціонарного температурного пограничного шару має вигляд [11]

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

При розв'язанні задач теплообміну часто використовують степінне наближення для описання профілів швидкості

$$u(x, y) = A(x)y^n. \quad (2)$$

Підстановка профілю (2) в друге рівняння системи (1) дає

$$A(x)y^n \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{A'(x)}{n+1} y^{n+1} \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3)$$

Рівняння (3) допускає групу симетрії з інфінітезимальним генератором

$$q_\Sigma = C_1 y \partial_y + C_1 (n+2) \left(\frac{\frac{1}{A^{n+1}}}{\int A^{n+1} dx} - \frac{(n+2)A'}{(n+1)A} \right) \partial_x + (C_2 + C_3 T) \partial_T. \quad (4)$$

Даний генератор надає наступні автомодельні форми

$$\begin{aligned} \eta &= y \left(a A^{-\frac{n+2}{n+1}} \int A^{\frac{1}{n+1}} dx \right)^{-\frac{1}{n+2}}, \\ T_\infty - T &= s(x) \vartheta(\eta). \end{aligned} \quad (5)$$

Симетрії C_2 і C_3 не пов'язані з C_1 . Тому вигляд функції $s(x)$ не пов'язаний з виглядом автомодельної змінної.

Підстановка (5) в рівняння (3) призводить до наступного рівняння

$$\vartheta'' + \frac{\eta^{n+1}}{n+2} \vartheta' - \frac{s'(x) \int A^{\frac{1}{n+1}}(x) dx}{s(x) A^{\frac{1}{n+1}}(x)} \eta^n \vartheta = 0. \quad (6)$$

Аналітичний розв'язок

Далі розглянемо два варіанти: пограничний шар на теплопровідній стінці зі сталою температурою поверхні і пограничний шар на теплоізований стінці.

Теплопровідна стінка

У випадку теплопровідної стінки зі сталою температурою поверхні маємо

$$s = T_\infty - T_w, \quad \Theta = \frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_w} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T} = \vartheta(\eta) \quad (7)$$

і рівняння (6) переходить в

$$\vartheta'' + \frac{\eta^{n+1}}{n+2} \vartheta' = 0 \quad (8)$$

Задаючись різними видами профілів швидкості (2) можливо легко проінтегрувати рівняння (8). Наприклад, для течії в області відриву пограничного шару можливо для величин в рівнянні (2) прийняти [12]

$$A = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx}, \quad n = 2.$$

При цьому рішення рівняння (8) має вигляд

$$\theta = \frac{4}{\Gamma(1/4)} \int_0^{\xi} \exp(-\xi^4) d\xi, \quad \xi = \frac{\eta}{2}, \quad (9)$$

звідки легко знайти вираз для локального числа Нуссельта [13]

$$\text{Nu}_x = \frac{2^{3/4}}{\Gamma(1/4)} \left(-\frac{U_\infty}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} \right)^{1/3} \left[x \int_{x_0}^x \left(-\frac{U_\infty}{\nu} \frac{dU_\infty}{dx} \right)^{1/3} dx \right]^{-1/4} \sqrt[4]{\text{Pr}}. \quad (10)$$

Тут використано рівняння Бернуллі для зовнішньої течії. Однак, запропонований підхід дає більш загальний вираз для коефіцієнта тепловіддачі, який справедливий для будь-кого закону зовнішньої течії.

При низьких значеннях числа Прандтля в рівнянні (2) можливо припустити

$$A = U_\infty(x), \quad n = 0.$$

Тоді рішення рівняння (8) виглядає наступним чином

$$\theta = \text{erf}(\xi), \quad \xi = \frac{\eta}{2}.$$

Відповідний вираз для коефіцієнта тепловіддачі має вигляд

$$\text{Nu}_x = \frac{\text{Re}_x \text{Pr}}{\sqrt{\frac{\pi}{a} \int_0^x U_\infty(x) dx}}, \quad (11)$$

яке, при степінному розподілі швидкості, переходить в

$$\text{Nu}_x = \sqrt{\frac{1+m}{\pi}} \text{Re}_x \text{Pr}. \quad (12)$$

Для більших чисел Прандтля в рівнянні (2) приймаємо

$$A = 0,332 U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad n = 1$$

і рішення рівняння (8) призводить до наступної критеріальної форми

$$\text{Nu}_x = \frac{3}{\Gamma(1/3)} \sqrt{\text{Re}_x} \sqrt[3]{\frac{0,332}{12} \text{Pr}}. \quad (13)$$

Теплоізолювана поверхня

Для теплоізолюваної поверхні вид функції $s=s(x)$ визначається з умови перетворення рівняння (6) в автомодельне рівняння і співвідношення

$$\int_{-\infty 0}^{\infty} u(T - T_\infty) dy = \text{const} \quad (14)$$

Тут нижня границя інтегрування дорівнює нескінченності для необмежених по осі y і нулю – для обмежених.

Умову переходу до автомодельної форми можливо записати наступним чином

$$\frac{s' \int A^{\frac{1}{n+1}} dx}{s A^{\frac{1}{n+1}}} = \text{const} = -\frac{1}{k} \quad (15)$$

Рішення цього диференціального рівняння має вигляд

$$s = c_1 \left(\int A^{\frac{1}{n+1}} dx \right)^{-\frac{1}{k}} \quad (16)$$

Підстановка (16) в рівняння (14) показала, що

$$k = \frac{n+2}{n+1}. \quad (17)$$

Таким чином, для теплоізолюваної поверхні рівняння (6) набуває вигляду

$$g'' + \frac{1}{n+2} \eta^{n+1} g' + \frac{n+1}{n+2} \eta^n g = 0$$

або

$$g'' + \frac{1}{n+2} (\eta^{n+1} g)' = 0. \quad (18)$$

Рішення цього рівняння має наступний вигляд

$$\vartheta = c_2 \exp\left(-\frac{\eta^{n+2}}{(n+2)^2}\right). \quad (19)$$

Підставляючи (16) з урахуванням (17) в (5) отримаємо

$$T_\infty - T = c \left(\int_0^x A^{\frac{1}{n+1}} dx \right)^{\frac{n+1}{n+2}} \exp\left(-\frac{\eta^{n+2}}{(n+2)^2}\right),$$

де константи інтегрування c_1 і c_2 замінено константою c . Кінцева залежність для розподілу температури виглядає наступним чином

$$\frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_{w0}} = \frac{\left(\int_0^{x_0} A^{\frac{1}{n+1}} dx \right)^{\frac{n+1}{n+2}}}{\left(\int_0^x A^{\frac{1}{n+1}} dx \right)^{\frac{n+1}{n+2}}} \exp\left(-\frac{\eta^{n+2}}{(n+2)^2}\right). \quad (20)$$

Тут x_0 відповідає перетину пограничного шару, де температура стінки дорівнює T_{w0} . При цьому інтеграл в автомоделній змінній повинен мати границі 0 і x . Тоді при $x = 0$ виконується умова $T = T_\infty$. Вибираючи різні значення A і n можливо отримувати залежності профілів температури для різних типів течій.

Важливо відзначити, що рівняння (3) — є окремим випадком рівняння виду

$$A(x)y^n \frac{\partial T}{\partial x} - B(x)y^{n+1} \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (21)$$

де функції $A(x)$ і $B(x)$ не пов'язані між собою якимось додатковим співвідношенням. Однак це рівняння також допускає групу симетрії, яка генерує наступну автомоделну змінну

$$\eta = y \left(a \exp\left[-(n+2) \int \frac{B(x)}{A(x)} dx\right] \int \frac{\exp\left[(n+2) \int \frac{B(x)}{A(x)} dx\right]}{A(x)} dx \right)^{-\frac{1}{n+2}}. \quad (22)$$

Отримані рішення справедливі для окремих випадків градієнтних течій. В роботах [14,15] досліджувався теплообмін в пограничному шарі при степінному зовнішній течії і припущенні, що розподіл температури на стінці також задовольняє степінному закону

$$T_w(x) - T_\infty = k_T x^n. \quad (23)$$

При цьому вводяться модифіковані автомоделні форми разом з автомоделною функцією температури

$$\eta = y \sqrt{\frac{k}{v}} x^{m-1}, \quad u = k f'(\eta) x^m, \quad \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \vartheta(\eta) \quad (24)$$

Підстановка (24) у друге рівняння системи (1) дає

$$\vartheta'' + \frac{m+1}{2} \text{Pr} f \vartheta' - n \text{Pr} f' \vartheta = 0 \quad (25)$$

Це рівняння розв'язується при граничних умовах

$$\begin{aligned} \eta = 0, & \quad \vartheta = 1, \\ \eta \rightarrow \infty, & \quad \vartheta = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

При $n = 0$ в рівнянні (23), тобто при постійній температурі поверхні, Э. Эккерт [11] отримав наступне співвідношення для локального числа Нуссельта

$$\text{Nu}_x = \left[\int_0^\infty \exp\left(-\text{Pr} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \int_0^\eta f d\eta\right) d\eta \right]^{-1} \sqrt{\text{Re}_x}. \quad (27)$$

Висновки

Розвиток нових напрямків досліджень в галузі теоретичної теплофізики потребує достовірних аналітичних рішень, які б могли враховувати основні аспекти динаміки зміни фізичних параметрів в досліджуваних об'єктах. Однією з таких аналітичних методик є групи симетрії.

На основі груп симетрії в статті вирішено задачу теплообміну в градієнтних ламінарних течіях. Вперше отримано симетрії рівняння енергії для пограничного шару при довільній маршевій змінній швидкості. Продемонстровані приклади використання методів групового аналізу до дослідження теплообміну в пограничному шарі нестисливої рідини. Розглянуто задачі теплообміну в пограничному шарі на теплопровідній стінці з постійною температурою і на теплоізолюваній стінці. Отримано аналітичні залежності для профілів температури і коефіцієнтів тепловіддачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Олвер П. Приложение групп Ли к исследованию дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1989.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978.
3. Oberlack M. Asymptotic expansion, symmetry groups, and invariant solutions of laminar and turbulent wall-bounded flows. ZAMM. 2000. 80, №11-12. P.791-800.
4. Авраменко А.А., Кобзарь С.Г. Приложение групп Ли к исследованию процессов нестационарного теплообмена около сферы в области малых чисел Рейнольдса. Промышленная теплотехника. 1998. 20, №2. С.47-50.
5. Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V., Dmitrenko N.P., Kravchuk A.V. Mixed convection in a vertical flat microchannel. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017. 25, 106. P.1164-1173.
6. Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V. An analytical and numerical study on the start-up flow of slightly rarefied gases in a parallel-plate channel and a pipe. Physics of Fluids. 2015. 27 (4), 042001 -21.
7. Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V. Start-up slip flow in a microchannel with a rectangular cross section. Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2015. 20, 29 (5), P.351-371.
8. Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V., Dmitrenko N.P. Dean instability of nanofluids with radial temperature and concentration non-uniformity. Physics of Fluids. 2016. 23. 28 (3), 034104.
9. Avramenko A.A., Shevchuk I.V., Abdallah S., Blinov D.G., Harmand S. Symmetry analysis for film boiling of nanofluids on a vertical plate using a nonlinear approach. Journal of Molecular Liquids. 2016. V.20, 223. P.156-164.
10. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V. The onset of convection in a suspension of gyrotactic microorganisms in superimposed fluid and porous layers: effect of vertical throughflow. Transport in porous media. 2006. 25, 65 (2). P.159-176.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974.
12. Escuder M. P. Heat transfer to near-separating laminar boundary layer. Int. J. Heat and Mass Transf. 1974. V.17, № 1, P. 109 - 112.
13. Авраменко А.А. Теплообмен в зоне отрыва пограничного слоя. Промышленная теплотехника. 1998. 20, №4. С.20-22
14. Evans H. L. Mass transfer through laminar boundary layers. 7. Future similar solutions to the b-equation when $B = 0$. Int. J. Heat and Mass Transf. 1962, №5, P. 35 - 37.
15. Imai I. On the heat transfer to constant property laminar boundary layer with power function free stream velocity and wall temperature distributions. Quart. Appl. Math. 1958. V.16, P. 33 - 45.

HEAT TRANSFER IN GRADIENT LAMINAR FLOWS

Avramenko A.A., Tyrinov A.O., Dmitrenko N.P., Kovetska Yu.Yu.

Institute of Engineering Thermophysics, National Academy of Sciences of Ukraine, 2a, Kapnist str., Kiev 03057, Ukraine

<https://doi.org/10.31472/tpe.3.2021.4>

The development of new areas of research in the field of theoretical thermophysics requires reliable analytical solutions that could take into account the main aspects of physical parameters in the studied objects. One such analytical technique is symmetry groups.

On the basis of symmetry groups the problem of heat transfer in gradient laminar flows is solved in the paper. For the first time, the symmetries of the energy equation for the boundary layer at an arbitrary changing velocity at marching direction are obtained. Examples of the use of group analysis methods for the study of heat transfer in the boundary layer of an incompressible fluid are demonstrated. The problems of heat transfer in the boundary layer on a heat-conducting wall with a constant temperature and on a heat-insulated wall are considered. Analytical relations for temperature and heat transfer coefficients distribution are obtained.

References 15.

Key words: heat transfer, laminar boundary layer, theory of symmetry groups.

1. *Olver P.* [Application of Lie groups to the study of differential equations], Moskva, Mir, 1989. (Rus)

2. *Ovsyannikov L.V.* [Group analysis of differential equations], Moskva, Nauka, 1978. (Rus)

3. *Oberlack M.* Asymptotic expansion, symmetry groups, and invariant solutions of laminar and turbulent wall-bounded flows. *ZAMM*. 2000. 80, №11-12. P.791-800.

4. *Avramenko A.A., Kobzar' S.G.* [Application of Lie groups to the study of unsteady heat transfer processes around a sphere in the region of small Reynolds numbers], [Industrial heating technology], 1998. V.20, №2. P.47-50. (Rus.)

5. *Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V., Dmitrenko N.P., Kravchuk A.V.* Mixed convection in a vertical flat microchannel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2017. 25, 106. P.1164-1173

6. *Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V.* An analytical and numerical study on the start-up flow of slightly rarefied gases in a parallel-plate channel and a pipe. *Physics of Fluids*. 2015. 27 (4), 042001 21

7. *Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V.* Start-up slip flow in a microchannel with a rectangular cross section. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. 2015. 20, 29 (5), P.351-371

8. *Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V., Dmitrenko N.P.* Dean instability of nanofluids with radial temperature and concentration non-uniformity. *Physics of Fluids*. 2016. 23. 28 (3), 034104

9. *Avramenko A.A., Shevchuk I.V., Abdallah S., Blinov D.G., Harmand S.* Symmetry analysis for film boiling of nanofluids on a vertical plate using a nonlinear approach. *Journal of Molecular Liquids*. 2016. 20, 223. P.156-164

10. *Avramenko A.A., Kuznetsov A.V.* The onset of convection in a suspension of gyrotactic microorganisms in superimposed fluid and porous layers: effect of vertical throughflow. *Transport in porous media*. 2006. 25, 65 (2). P.159-176

11. *Shlihting G.* [Boundary layer theory]], Moskva, Nauka, 1974. (Rus)

12. *Escuder M. P.* Heat transfer to near-separating laminar boundary layer. *Int. J. Heat and Mass Transf.* 1974. V.17, № 1, P. 109 - 112.

13. *Avramenko A.A.* [Heat transfer in the separation zone of the boundary layer], [Industrial Heat Engineering], 1998. V.20, №4. P.20-22. (Rus.)

14. *Evans H. L.* Mass transfer through laminar boundary layers. 7. Future similar solutions to the b-equation when $B = 0$. *Int. J. Heat and Mass Transf.* 1962. №5, P. 35 - 37.

15. *Imai I.* On the heat transfer to constant property laminar boundary layer with power function free stream velocity and wall temperature distributions. *Quart. Appl. Math.* 1958. №16, P. 33 - 45.

*Отримано 03.06.2021
Received 03.06.2021*