

УДК 532.536

НЕЛІНІЙНИЙ АНАЛІЗ КОНВЕКТИВНОЇ НЕСТІЙКОСТІ РЕАЛЬНИХ ГАЗІВ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Авраменко А.О.¹, член-кореспондент НАН України, Ковецька Ю.Ю.², докт. філ., Кобзар А.С.,
Козлова В.В.

Інститут технічної теплофізики НАН України, вул. М. Капніст 2а, Київ 03057, Україна

¹<https://orcid.org/0000-0002-2416-3512>

²<https://orcid.org/0000-0002-4759-274X>

<https://doi.org/10.31472/ttpe.3.2024.2>

На основі підходу Лоренца досліджено нелінійну нестійкість в газі Ван дер Ваальса в зазорі з пористим середовищем кінцевої товщини. При цьому встановлена фіксована різниця температур між верхньою холодною поверхнею і гарячою нижньою. У ході чисельного рішення отримано критерії монотонної та осцилюючої нестійкості, а також критерій виникнення дивного атрактора у фазовому просторі. Проаналізовано характер залежностей критичних чисел Релея від пористості середовища, а також параметрів рівняння стану Ван-дер-Ваальса Wa_a і Wa_b .

On the basis of the Lorentz approach, the nonlinear instability in the Van der Waals gas in the gap with a porous medium of finite thickness was studied. A fixed temperature difference is set between the upper cold surface and the lower hot one. During a numerical solution, criteria for monotonic and oscillating instability were obtained and the criterion for the appearance of a strange attractor in the phase space are presented. The nature of the dependences of the critical Rayleigh numbers on the physical properties of the gas, the porosity of the medium, and the parameters of the van der Waals equation of state Wa_a and Wa_b is analyzed.

Бібл. 15, табл. 8

Ключові слова: модель Лоренца, газ Ван дер Ваальса, дивний атрактор, критерій стійкості.

a, b – константи Ван дер Ваальса;

g – гравітаційне прискорення;

h – висота зазору;

K – проникність;

p – тиск;

R – газова стала;

T – температура;

t – час;

x, y – декартові координати;

u, v – складові швидкості;

Грецькі символи

α – коефіцієнт температуропровідності;

β – коефіцієнт об'ємного розширення;

ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості;

ρ – густина середовища;

Ψ – функція току;

Безрозмірні параметри:

Da – число Дарсі;

Fo – число Фур'є;

Pr – число Прандтля;

Ra – число Релея;

Wa_a, Wa_b – числа Ван дер Ваальса;

Вступ

У 1963 Едвард Лоренц запропонував наближену математичну модель (систему Лоренца) для конвекції Релея-Бенара і чисельно визначив в цій моделі хаотичний атрактор [1]. Використовуючи спрощену математичну версію цієї моделі, він виявив, що при певних параметрах конвективної системи траєкторія стає складною і невизначеною, що призводить до її непередбачуваної поведінки. Хаотична поведінка була виявлена у більшості класичних моделей біологічних систем, деяких хімічних реакціях, метеорологічних

процесах та інших. Це відкриття стимулювало дослідження атракторів і привертає велику увагу вчених з різних галузей [2-4].

При прогнозуванні фізичних процесів фундаментальне значення має перехід ламінарної форми течії в турбулентну. Турбулентні потоки найбільш широко представлені в природних явищах та технічних додатках. На сьогоднішній день існує велика різноманітність математичних підходів при моделюванні турбулентності. Деякі з них представлені у огляді [5]. Останнім часом активно розвивається метод ренормалізаційних груп,

який дозволяє отримати теоретичні значення констант турбулентності та уніфікувати самі моделі для різних типів течій. У роботі [6] побудовано макроскопічну модель турбулентності нестисливої течії в пористих середовищах. Отримано вирази для перенормованої турбулентної в'язкості, що враховує ультрафіолетову частину спектра турбулентної кінетичної енергії. Іншим поширеним методом є аналіз симетрії, що ґрунтується на теорії груп Лі [7]. Цей підхід також використовується при вирішенні багатьох нелінійних задач. Автори в [8] розробили автотельну модель для потоку нанофлюїдів при моделюванні переносу тепла, імпульсу та концентрації в умовах плівкового кипіння.

В даний час є багато робіт, присвячених лінійній гідродинамічній нестійкості в пористих середовищах. Наприклад, течія у гіперпористому середовищі для розріджених газів розглядалась в [9]. Отримано рівняння для аналізу впливу тривимірних збурень на течію. Проаналізовано залежність критичного числа Рейнольдса від пористості середовища та параметра проковзування. З порівняння розрахунків випливає, що тривимірні збурення більш критичні у порівнянні з двовимірними. Цей висновок прямо протилежний теоремі Сквайра для лінійної стадії розвитку нестійкості. В роботі [10] проведено лінійний аналіз виникнення біотермічної конвекції на основі моделі Дарсі в суспензії гіротактичних мікроорганізмів у горизонтальному шарі пористого середовища. Отримано критичні числа Релея біоконвекції для різних значень числа Пекле, числа гіротаксису та ексцентриситету клітини. Е. Лоренц запропонував нелінійний підхід, заснований на визначенні умов, за яких у фазовому просторі системи диференціальних рівнянь третього та вище порядків з'являється дивний атрактор, що є критерієм зародження турбулентного руху.

У даній роботі ми досліджуємо нелінійну стійкість у газі Ван дер Ваальса, оскільки відомо, що модель ідеального газу дозволяє описувати стан системи у досить вузькому діапазоні параметрів. У роботах [11-12] наведено чисельні та аналітичні розв'язки задач гідродинаміки в рамках моделі ідеального газу. Зокрема, в [11] досліджено ламінарну течію в криволінійному прямокутному каналі з пористим середовищем. В ході аналітичного розвитку показано залежність профілю швидкості від геометрії каналу (внутрішнього і зовнішнього радіусів стінок каналу та співвідношення сторін поперечного перерізу, а також числа Дарсі. В роботі [12] авторами представлений підхід до

аналізу мікро- та макропотоків з використанням методу ґрат Больцмана. В результаті отримано профілі швидкості та проаналізовано вплив числа Кнудсена на гідродинамічні характеристики течії. Модель Ван-дер-Ваальса є узагальненою моделлю при нелінійній залежності густини робочого тіла від температури і в даний час вивченню цих питань приділяється велика увага. Motamedian M. та ін. у роботі [13] отримали аналітичне рішення для реальних газів у потоці з проковзуванням. Проаналізовано ефект проковзування та геометрії поперечного перерізу на профілі локальної та середньої швидкості, а також відносне число Пуазейля. Розрахунки показали, що логарифмічна функція числа Пуазейля зменшується зі збільшенням числа Кнудсена та радіуса поперечного перерізу.

Таким чином, мета цього дослідження полягає у побудові моделі Лоренца для пористих середовищ у реальних газах та дослідження на її основі критеріїв нелінійної конвективної нестійкості.

II. Математична модель

Розглянемо двовимірну задачу при вільно-конвективній течії між двома паралельними горизонтальними пластинами з висотою зазору h . Пористість середовища між ними визначається проникністю K . У початковий момент часу існує перепад температури $\Delta T = T_1 - T_2$ між нижньою (нагрітою $T = T_1$) та верхньою (холодною $T = T_2$) пластинами. Задача описується системою диференціальних рівнянь у наближенні Бусінеска та має наступний вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\nu}{K} u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\nu}{K} v + g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (4)$$

Індекс «1» відноситься до параметра на зовнішній границі приграничного шару. Третій доданок у правих частинах рівнянь (2) і (3) описує лінійний «пористий» опір Дарсі.

Систему рівнянь (1)-(4) необхідно доповнити рівнянням стану Ван-дер-Ваальса

$$(p + a\rho^2)\left(\frac{1}{\rho} - b\right) = RT,$$

де a і b є константами Ван-дер-Ваальса.

Виразимо густину в рівнянні (3) за допомогою рівняння (5). В результаті отримуємо

$$\frac{\rho}{\rho_1} = 1 - \frac{Z}{1 + \beta\Theta} \left(1 - \frac{Wa_b}{1 + \beta\Theta} + \frac{Wa_a}{(1 + \beta\Theta)^2} \right), \quad (6)$$

де

$$Z = \frac{p}{RT\rho}, \quad Wa_a = \frac{ap}{R^2T^2}, \quad Wa_b = \frac{bp}{RT},$$

$$\beta = \frac{1}{T_1},$$

$$\Theta = T - T_1. \quad (9)$$

Оскільки розглядається двовимірною задачею, зручно використовувати функцію струму в такий спосіб:

$$u = \partial\psi / \partial y, \quad v = -\partial\psi / \partial x. \quad (10)$$

Після підстановки (6), (10) в систему (1) – (3) отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi) = -\frac{v}{K} \nabla^2\psi + v \nabla^4\psi + g\beta \frac{1 + 3Wa_a - 2Wa_b + \beta\Theta(2 - 2Wa_b + \beta\Theta)}{(1 + Wa_a - Wa_b)(1 + \beta\Theta)^4} \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Theta}{\partial y} = \alpha \nabla^2\Theta. \quad (12)$$

Згідно Лоренцу [1] розподіл температур зручно представити у вигляді

$$\Theta = \theta - \Delta T y / h, \quad (13)$$

де θ є відхилення від лінійного незбуреного профілю температури, викликане конвективним збуренням. Крім того, приймемо припущення, що $\beta\Theta \ll 1$. Тоді, враховуючи вираз для Θ , перетворюємо систему (11), (12) на

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi) = -\frac{v}{K} \nabla^2\psi + v \nabla^4\psi + g\beta \frac{1 + 3Wa_a - 2Wa_b}{1 + Wa_a - Wa_b} \frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad (14)$$

$$(15) \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \alpha \nabla^2\theta.$$

Розглянемо завдання із вільними границями. У цьому випадку система (14), (15) має бути проаналізована за наступних умов

$$(7) \quad \psi = \nabla^2\psi = \theta = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \psi = \nabla^2\psi = \theta = 0 \quad y = h. \quad (16)$$

III. Збурені рівняння та їх аналіз

Для виконання граничних умов (16) виберемо такі співвідношення для збурених функцій [1]

$$(8) \quad \psi = \sqrt{2} \frac{\alpha(1 + \lambda^2)}{\lambda} X(t) \sin\left(\frac{\pi\lambda x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right), \quad (17)$$

$$(9) \quad \theta = \frac{\Delta T}{\pi r} \left[\sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi\lambda x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi y}{h}\right) \right]. \quad (18)$$

де λ характеризує періодичність руху по координаті x , X – амплітуда конвективного руху, Y – різниця температур між висхідним і низхідним потоками, Z – відхилення вертикального профілю температури від лінійного. Крім того, в рівнянні (18) використовуємо нормоване число Релея

$$r = Ra/Ra_c, \quad (19)$$

де

$$Ra = \frac{g\beta h^3 \Delta T}{\alpha \nu}, \quad (20)$$

$$Ra_c = \frac{\pi^4(1 + \lambda^2)^3}{\lambda^2} - \text{критичне число Релея.} \quad (21)$$

Підстановка рівнянь (17) і (18) в (14) дає

$$\frac{dX(Fo)}{dFo} = Pr \left[\frac{1 + 3Wa_a - 2Wa_b}{1 + Wa_a - Wa_b} Y(Fo) - \left(1 + \frac{b}{4\pi^2 Da} \right) X(Fo) \right], \quad (22)$$

де

$$Da = \frac{K}{h^2} - \text{число Дарсі}, \quad (23)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} - \text{число Прандтля}, \quad (24)$$

$$Fo = \frac{\pi^2(1+\lambda^2)\alpha t}{h^2} - \text{число Фур'є}, \quad (25)$$

$$b = \frac{4}{1+\lambda^2}. \quad (26)$$

Після підстановки рівнянь (17) та (18) в (15), отримуємо рівняння для нев'язки

$$R(x, y) = \left[\frac{dY(Fo)}{dFo} - rX(Fo) + Y(Fo) \right] \cos\left(\frac{\pi\lambda x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) - 2X(Fo)Z(Fo) \cos\left(\frac{\pi\lambda x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{h}\right) - \sqrt{2} \left[\frac{dZ(Fo)}{dFo} - X(Fo)Y(Fo) + bZ(Fo) \right] \cos\left(\frac{\pi\lambda x}{h}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{h}\right). \quad (27)$$

Далі, згідно методу Галеркіна, помножимо $R(x, y)$ на пробні функції та проінтегруємо по y в межах від нуля до h . При використанні $\sin(\pi y/h)$, отримаємо

$$\frac{dY(Fo)}{dFo} = rX(Fo) - X(Fo)Z(Fo) - Y(Fo). \quad (28)$$

$$\frac{dZ(Fo)}{dFo} = X(Fo)Y(Fo) - bZ(Fo). \quad (29)$$

Таким чином, маємо систему трьох нелінійних рівнянь (22), (28) та (29). Ця система відрізняється від системи Лоренца [1] членами у рівнянні (22), які містять числа Дарсі та Ван дер Ваальса. У межі $Da \rightarrow \infty$ та $Wa_a = Wa_b = 0$ система (22), (28), (29) трансформується в систему Лоренца.

IV. Дослідження нестійкості

Спочатку розглянемо поведінку системи у стаціонарних станах. Система (22), (28), (29) має дві точки спокою. Перша стаціонарна точка – це

$$X_1^* = Y_1^* = Z_1^* = 0. \quad (30)$$

Для дослідження системи на стійкість накладемо на стаціонарні стани малі обурення у вигляді

$$X = X_1^* + X_L \exp(\sigma Fo), \quad (31)$$

$$Y = Y_1^* + Y_L \exp(\sigma Fo), \quad (32)$$

$$Z = Z_1^* + Z_L \exp(\sigma Fo), \quad (33)$$

де σ – коефіцієнт наростання збурень. Підстановка (31) – (33) до системи (22), (28), (29) з урахуванням лінеаризації дає характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -Pr\left(1 + \frac{b}{4\pi^2 Da}\right) - \sigma & Pr\left(\frac{1+3Wa_a-2Wa_b}{1+Wa_a-Wa_b}\right) & 0 \\ r & -1-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -b-\sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (34)$$

Характеристичне рівняння матриці взаємодії має три дійсні корені. Два з них негативні. Один корінь позитивний. Це дає межу монотонної нестійкості

$$r = r_{cr} = \left(\frac{1+Wa_a-Wa_b}{1+3Wa_a-2Wa_b} \right) \left(1 + \frac{b}{4\pi^2 Da} \right) = \frac{D}{W}, \quad (35)$$

де

$$W = \frac{1+3Wa_a-2Wa_b}{1+Wa_a-Wa_b}, \quad (36)$$

$$D = 1 + \frac{b}{4\pi^2 Da}. \quad (37)$$

Для ідеального газу ($Wa_a = Wa_b = 0$) та чистого середовища ($Da \rightarrow \infty$) рівняння (35) перетворюється на рішення Лоренца $r_{cr} = 1$ [1].

Далі досліджуємо залежність числа Релея від розміру вихору λ . Ця залежність має мінімум, що відповідає критичному значенню числа Релея для монотонної нестійкості. Щоб знайти цей мінімум, продиференціюємо $Ra = Ra(\lambda)$ по λ та отриманий результат порівнюємо до нуля. Вирішення цього рівняння є

$$\lambda_{cr} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\pi^2 Da(10+9\pi^2 Da)}}{\pi^2 Da} - 1 - \frac{1}{\pi^2 Da}}. \quad (38)$$

Для чистого середовища ($Da \rightarrow \infty$) рівняння (38) перетворюється на

$$\lambda_{cr} = \sqrt{\frac{1}{2}}. \quad (39)$$

В результаті математичних перетворень маємо критичний параметр монотонної нестійкості

$$Ra_{cr1} = \frac{1 + Wa_a - Wa_b}{1 + 3Wa_a - 2Wa_b} \frac{9\pi^2 Da(2 + 3\pi^2 Da) + (1 + 9\pi^2 Da)\sqrt{(1 + \pi^2 Da)(1 + 9\pi^2 Da)}}{2Da^2}. \quad (40)$$

Для ідеального газу ($Wa_a = Wa_b = 0$) та чистого середовища ($Da \rightarrow \infty$) рівняння (40) перетворюється на класичне рішення Релея задачі власних значень з вільними граничними умовами (16)

$$Ra_{cr1} = \frac{27\pi^4}{4}. \quad (41)$$

Рівняння (38) показує, що критичний розмір вихору не залежить від властивостей газу, а визначається пористістю середовища. Зі зростанням значення числа Дарсі значення λ монотонно знижується, тобто у пористому середовищі вихори більші, ніж у чистому.

Розрахунки показали, що зменшення проникності середовища стабілізує стан системи, тобто вихрові структури виникають при вищих значеннях чисел Релея. При цьому зі зростанням параметра W стійкість потоку падає. Збільшення параметра Wa_a призводить до зниження стійкості течії. Константа a в рівнянні (5) характеризує додатковий тиск у реальному газі (порівняно з ідеальним газом), що виникає у пристіночному шарі. Очевидно, що цей ефект підвищує підйомну силу. В результаті швидкість збільшується та погіршуються умови стійкості. У той же час збільшення параметра Wa_b підвищує стійкість течії. Як відомо, константа b у рівнянні (5) описує додатковий обсяг простору, що не заповнений молекулами. Збільшення цього додаткового обсягу і, отже, параметра b призводить до збільшення гідродинамічного опору і робить потік більш стійким.

Далі розглянемо другу стаціонарну точку системи (22), (28), (29)

$$X_2^* = \pm \sqrt{\frac{b(rW - D)}{D}}, \quad (42)$$

$$Y_2^* = \pm \sqrt{\frac{Db(rW - D)}{W^2}}, \quad (43)$$

$$Z_2^* = \frac{rW - D}{W}, \quad (44)$$

Лінеаризуючи систему (22), (28), (29) щодо другої стаціонарної точки, отримаємо

$$\frac{dX_L}{dFo} = \text{Pr}[WY_L - DX_L], \quad (45)$$

$$\frac{dY_L}{dFo} = \frac{D}{W}X_L - Y_L - \sqrt{\frac{b(rW - D)}{D}}Z_L, \quad (46)$$

$$\frac{dZ_L}{dFo} = \sqrt{\frac{Db(rW - D)}{W^2}}X_L + \sqrt{\frac{b(rW - D)}{D}}Y_L - bZ_L. \quad (47)$$

В цьому випадку характеристичне рівняння має вигляд

$$\sigma^3 + (\text{Pr}D + b + 1)\sigma^2 + \left(b \left(D\text{Pr} + \frac{rW}{D} \right) + \text{Pr} \left(D - \frac{D^2}{W} \right) \right) + b\text{Pr} \left(r(D + W) - \frac{2D^2}{W} \right) = 0. \quad (48)$$

В даному випадку нас цікавить осцилююча нестійкість, коли у власних значеннях виникає мніма частина, а в системі з'являється біфуркація Хопфа. Тому знайдемо критичне значення r , при якому корені характеристичного рівняння мають комплексно спряжену частину, тобто

$$\sigma_{2,3} = \pm i\Omega, \quad (49)$$

Враховуючи (49), характеристичне рівняння можна подати у вигляді

$$(\sigma - i\Omega)(\sigma + i\Omega)(\sigma - \sigma_1) = \sigma^3 - \sigma_1\sigma^2 + \Omega^2\sigma - \Omega^2\sigma_1 = 0. \quad (50)$$

Порівнюючи рівняння (48) і (50), отримуємо критерій осцилюючої нестійкості у вигляді

$$r = \frac{D^2 \text{Pr}}{bW} \frac{D(\text{Pr}+1-b) - W(b+1)(\text{Pr}+1+b)}{W(\text{Pr}+1+b-DW) - D^2 \text{Pr}}. \quad (51)$$

Отже, за умови (51) існує докритична біфуркація Хопфа, тобто у фазовому просторі існує граничний цикл, який притягує орбіти. Враховуючи (19) – (21), запишемо рівняння для критичного значення числа Релея осцилюючої нестійкості

$$\text{Ra}_{cr2}(\lambda = \lambda_{\min}) = \frac{\pi^4(1+\lambda^2)^3}{\lambda^2} \frac{D^2 \text{Pr}}{bW} \frac{D(\text{Pr}+1-b) - W(b+1)(\text{Pr}+1+b)}{W(\text{Pr}+1+b-DW) - D^2 \text{Pr}}, \quad (52)$$

де параметр b визначається в рівнянні (26). Таким чином, для знаходження критерію осцилюючої нестійкості необхідно мінімізувати (52) по λ . Результати чисельних досліджень наведені в таблицях № 1 - 4.

Таблиця № 1 показує, що осцилююча нестійкість, на відміну від монотонної, залежить від числа Прандтля. При цьому стійкість потоку знижується з ростом значення числа Прандтля. Вочевидь, це обумовлено збільшенням в'язкості, яка масштабує число Релея в знаменнику. Розмір критичних вихорів зменшується зі зменшенням в'язкості середовища.

Таблиця № 2 показує, що осцилююча нестійкість посилюється зі зменшенням проникності пористого середовища. Тобто, ця тенденція протилежна впливу проникності на монотонну нестійкість. Вочевидь, що осциляції посилюються через взаємодію текучої та твердої фаз. При цьому розмір критичних вихорів зменшується через зменшення живого перерізу.

Вплив чисел Ван дер Ваальса на осцилюючу нестійкість також протилежний їх ефекту на монотонну нестійкість (таблиці № 3 та № 4). Як видно з таблиці №3, додатковий тиск в реальному газі «гасить» осцилюючі збурення, отже, зі зростанням значення параметра W_a течія стабілізується. Додатковий об'єм, навпаки, сприяє розвитку осцилюючих збурень (таблиця № 4) і тому зі зростанням значення параметра W_a ситуація дестабілізується.

Далі виникає питання про те, що відбувається після виникнення граничного циклу. Для цього було проведено чисельне дослідження системи (22), (28), (29) за допомогою пакета “Mathematica”. Дослідження показало, що при подальшому збільшенні параметра r існують режими, що характеризуються виникненням дивного аттрактора у фазовому просторі $(X(\text{Fo}), Y(\text{Fo}), Z(\text{Fo}))$.

У деякому інтервалі значень параметрів система втрачає стійкість, фазові траєкторії потрапляють у деяку частину фазового простору, де поведінка хаотично. Ця область фазового простору має власну область тяжіння,

Табл. 1. Вплив числа Прандтля на критичне число Релея осцилюючої нестійкості ($D=1$, $W=1$)

$\lambda_{\min}$	24.481	3.367	2.313	1.55	1.051	0.821
Pr	1.01	1.5	2	3	5	10
Ra_{cr2}	4.27×10^{10}	664201	141842	41703	19383	15783

Табл. 2. Вплив числа Дарсі на критичне число Релея осцилюючої нестійкості ($\text{Pr}=3$, $W=1$)

$\lambda_{\min}$	1.55	1.532	1.352	0.764	0.795	1.139
Da	∞	10	1	0.1	0.05	0.015
Ra_{cr2}	41703	40569	31264	7114	5044	3162

опинившись у якій фазовій траєкторії обов'язково прямують до хаотичного простору. Тобто, ця ділянка проявляє себе як атрактор. Оскільки такий атрактор не задовольняє властивостям простого атрактора, його називають дивним.

Відповідно до моделей [14,15], виникнення дивного атрактора можна інтерпретувати як критерій зародження незатухаючих турбулентних пульсацій.

У роботі Лоренца [1] проводилось дослідження для наступних значень параметрів $b = 8/3$ ($= 2-1/2$), $Sc = 10$. У цьому випадку дивний атрактор з'являється при $r \approx 28$. Цей набір параметрів був обраний тому, що число Релея Ra_c в цьому випадку має мінімум. Проте мінімум нормованого числа Релея r , при якому виникає дивний атрактор, має іншу координату. Тому необхідно дослідження широкого діапазону параметра b .

Отже, результати розрахунків критерію виникнення дивного атрактора при різних значеннях числа Прандтля наведено в таблиці № 5. Видно, що значення критерію турбулентних пульсацій зменшується зі збільшенням числа Прандтля, як і при осцилюючій нестійкості.

Як відомо, зі зменшенням числа Дарсі проникність потоку падає. З таблиці № 6 видно, що зменшення живого перерізу призводить до того, що при взаємодії твердих та рідких фаз турбулентні пульсації виникають раніше, ніж осцилююча нестійкість. Ця тенденція спостерігається до значень числа $Da = 1$. Далі ефект впливу пористості змінюється, та осцилююча нестійкість виникають раніше. При $Da > 0,1$ зменшення живого перерізу запобігає виникненню турбулентності та значення критичного числа Релея збільшуються.

Далі наводиться аналіз впливу параметрів реальних газів на критерій виникнення дивного атрактора (табл. № 7,8). Результати розрахунків показують, що ефект впливу чисел Ван дер Ваальса призводить до більш раннього виникнення осцилюючої нестійкості проти турбулентності.

Збільшення параметра Wa_a , який описує додатковий тиск, знижує стійкість потоку. Зростання Wa_b характеризує додатковий обсяг, що призводить до зменшення взаємодії турбулентних молей та течія стабілізується.

Табл. 3. Вплив числа Ван дер Ваальса Waa на критичне число Релея осцилюючої нестійкості ($Pr=3$, $Da=0.11$, $Wa_b=0$)

λ_{min}	0.764	0.749	0.732	0.721	0.713	0.704
Wa_a	0	0.1	0.3	0.5	0.7	1
Ra_{cr2}	7114	7668.	8582	9339	9986	10807

Табл. 4. Вплив числа Ван дер Ваальса Wab на критичне число Релея осцилюючої нестійкості ($Pr=3$, $Da=0.11$, $Wa_a=0.5$)

λ_{min}	0.721	0.722	0.725	0.73	0.737	0.764
Wa_b	0	0.1	0.3	0.5	0.7	1
Ra_{cr2}	9339	9246	9020	8717	8288	7114

Табл. 5. Вплив числа Прандтля на критерій виникнення турбулентних пульсацій Ra_{cr3} ($D=1$, $W=1$)

Pr	1.5	2	5	10
b_{cr3}	0.5	0.9	2.1	2.5
λ_{min}	2.64	1.85	0.95	0.82
r_{cr3}	29.5	32.9	24.2	23.5
Ra_{cr3}	210181	83682	18005	15627

Табл. 6. Вплив числа Дарсі на критерій виникнення турбулентних пульсацій Ra_{cr3} ($Pr=3$, $W=1$)

Da	∞	10	1	0.1	0.05
b_{cr3}	1.5	1.55	1.58	1.72	2.05
λ_{min}	1.29	1.25	1.23	1.15	0.97
r_{cr3}	30.7	32.0	32.1	32.6	43.6
Ra_{cr3}	34024	33892	33124	30080	33168

Табл. 7. Вплив числа Ван дер Ваальса W_{aa} на критерій виникнення турбулентних пульсацій Ra_{cr3} ($Pr=3$, $Da=0.11$, $W_{ab}=0$)

W_{aa}	0	0.1	0.3	0.5	0.7	1
b_{cr3}	1.71	2.1	2.15	2.2	2.21	2.21
λ_{min}	1.16	0.95	0.93	0.90	0.9	0.90
r_{cr3}	32.3	31.5	28.2	25.4	25.3	21.5
Ra_{cr3}	30071	28862	20558	18175	16614	15331

Табл. 8. Вплив числа Ван дер Ваальса W_{ab} на критерій виникнення турбулентних пульсацій Ra_{cr3} ($Pr=3$, $Da=0.11$, $W_{aa}=0.5$)

W_{ab}	0	0.1	0.3	0.5	0.7	1
b_{cr3}	2.2	2.22	2.22	2.22	2.24	2.24
λ_{min}	0.90	0.89	0.89	0.89	0.88	0.88
r_{cr3}	25.4	26.1	27.0	28.6	31.5	43.4
Ra_{cr3}	18175	18547	19187	20324	22237	30638

V. Висновки

Використовуючи чисельний метод, отримано залежність для критичного значення числа Релея осцилюючої нестійкості для газу Ван дер Ваальса. Результати досліджень показали, що стійкість потоку знижується зі зростанням значення Прандтля. Це зумовлено збільшенням в'язкості, що масштабує число Релея у знаменнику. Зі зменшенням проникності стійкість потоку знижується через взаємодію текучої та твердої фаз. При цьому розмір критичних вихорів зменшується через зменшення живого перерізу. Ефект числа W_{aa} гасить осцилюючі обурення, отже, зі зростанням значення параметра W_{aa} течія стабілізується. Збільшення параметра W_{ab} сприяє розвитку осцилюючих збурень, що призводить до дестабілізації течії.

Отримано критерій виникнення дивного атрактора Лоренца, який характеризує перехідний режим течії. Результати розрахунків показали, що значення критерію турбулентних пульсацій зменшується зі зростанням числа Прандтля, як і при осцилюючій нестійкості. Зменшення живого перерізу призводить до того, що при взаємодії твердої та текучої фаз турбулентні пульсації виникають раніше, ніж осцилююча нестійкість до значень числа $Da = 1$. Далі ефект впливу пористості змінюється. При $Da > 0,1$ зменшення проникності запобігає виникненню турбулентності. Зі зростанням параметра W_{aa} стійкість потоку знижується. Збільшення параметра W_{ab} призводить до зменшення взаємодії турбулентних молей і течія стабілізується.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences 1963; 20(2): 130-141. DOI:10.1007/978-0-387-21830-4_2
2. Shen B.L., Wang M., Yan P. Stable and unstable regions of the Lorenz system. Scientific Reports 2018; 8: 14982. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-33010-z>
3. Li M., Rao H., Tong Y. Revisiting a parity violating gravity model without ghost instability: Local Lorentz covariance. Physical Review 2021; 104: 084077. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.084077>
4. Dong H, Zhong B. The Calculation Process of the Limit Cycle for Lorenz System. Preprints 2021: 2021020419. doi: 10.20944/preprints202102.0419.v1
5. Khelifa Hani. Turbulence modeling a review for different used methods. International Journal of Heat and Technology 2021; 39(1); 227-234. <https://doi.org/10.18280/ijht.390125>.
6. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V. Renormalization group model of large-scale turbulence in porous media. Transport in Porous Media 2006; 63: 175-193. <https://doi.org/10.1007/s11242-005-4425-z>
7. Cantwell B.J. Introduction to Symmetry Analysis. Published in the USA, Cambridge University Press, New York. 2002. 603p. ISBN-13 978-0-511-57721-5
8. Avramenko A.A., Shevchuk I.V., Abdallah S., Blinov D.G., Harmand S. Symmetry analysis for film boiling of nanofluids on a vertical plate using a nonlinear approach. Journal of Molecular Liquids 2016; 223: 156-164. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2016.08.038>

9. *Avramenko A.A., Kuznetsov A.V., Nield D.A.* Instability of slip flow in a channel occupied by a hyperporous medium. *Journal of Porous Media* 2007; 10(5): 435-442. DOI: 10.1615/JPorMedia.v10.i5.20
10. *Nield D.A., Kuznetsov A.V., Avramenko A.A.* The Onset of Bioconvection in a Horizontal Porous-Medium Layer. *Transport in Porous Media* 2004; 54(3): 335-344. DOI: 10.1023/B:TIPM.0000003662.31212.5b
11. *Avramenko A.A., Kuznetsov A.V.* Flow in a curved porous channel with a rectangular cross section. *Journal of Porous Media* 2007; 11 (3): 241-246. DOI: 10.1615/JPorMedia.v11.i3.20
12. *Tyrinov A.I., Avramenko A.A., Basok B.I., Davydenko B.V.* Modeling of flows in a microchannel based on the Boltzmann lattice equation. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics* 2012; 85: 65-72. <https://doi.org/10.1007/s10891-012-0621-1>
13. *Motamedian M., Rahmati A.R.* Analytical Solution of Non-ideal Gaseous Slip Flow in Circular Sector Micro-channel. *Journal of Heat and Mass Transfer Research* 2020; 7:131- 141. DOI:10.22075/jhmtr.2020.19129.1259
14. *Ruelle D, Takens F.* On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics* 1971; 20; 167–192. <https://doi.org/10.1007/BF01646553>
15. *Feigenbaum M.J.* Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations. *Journal of Statistical Physics* 1978; 19: 25 – 52. <https://doi.org/10.1007/BF01020332>

NONLINEAR ANALYSIS OF CONVECTIVE INSTABILITY OF REAL GASES IN POROUS MEDIA

Avramenko A.A.¹, Kovetska Yu.Yu.², Kobzar A.S.³,
Kozlova V.V.⁴

*Institute of Engineering Thermophysics of the National
Academy of Sciences of Ukraine, 2a, Kapnist str.,
Kyiv, 03680, Ukraine*

¹Corresponding Member of the NAS of Ukraine, <https://orcid.org/0000-0002-2416-3512>

²PhD, <https://orcid.org/0000-0002-4759-274X>

³postgraduate

⁴Junior Researcher

<https://doi.org/10.31472/tpe.3.2024.2>

The article is devoted to the study of the nonlinear instability of the Van der Waals gas in a gap with a porous medium of finite thickness heated from below. A fixed temperature difference is set between the upper cold surface and the lower hot one. The Lorenz approach was used to solve the problem. During a numerical solution, criteria for monotonic instability and oscillating instability were obtained. The results of calculations of the criterion for the appearance of a strange attractor in the phase space are presented, which can be interpreted as a criterion for the generation of undamped turbulent fluctuations. The nature of the dependences of the critical Rayleigh numbers on the physical properties of the gas, the porosity of the medium, and the parameters of the Van der Waals equation of state Waa and Wab is analyzed.

The phenomenon of instability (formation of vortices in liquids or gases) in the space between two horizontal boundaries, when the lower one is heated, is widespread in technical applications. Lorenz developed a non-linear approach to the study of this phenomenon. This approach makes it possible to determine the criteria for the emergence of vortices and their transformation. This article uses the Lorenz approach to obtain instability criteria for a real gas whose properties are described by the van der Waals equation of state. This gas is in a porous medium. This combination of gas and medium has a wide technological application in the food, chemical and other industries. That is why the present study focused on this problem.

References 15, tables 8.

Key words: Lorenz model, Van der Waals gas, strange attractor, criteria for the stability.

1. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* 1963; 20(2): 130-141. DOI:10.1007/978-0-387-21830-4_2

2. Shen B.L., Wang M., Yan P. Stable and unstable regions of the Lorenz system. *Scientific Reports* 2018; 8: 14982. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-33010-z>

3. Li M., Rao H., Tong Y. Revisiting a parity violating gravity model without ghost instability: Local Lorentz covariance. *Physical Review* 2021; 104: 084077. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.084077>

4. Dong H, Zhong B. The Calculation Process of the Limit Cycle for Lorenz System. *Preprints* 2021: 2021020419. doi: 10.20944/preprints202102.0419.v1

5. Khelifa Hami. Turbulence modeling a review for different used methods. *International Journal of Heat and Technology* 2021; 39(1); 227-234. <https://doi.org/10.18280/ijht.390125>.

6. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V. Renormalization group model of large-scale turbulence in porous media. *Transport in Porous Media* 2006; 63: 175-193. <https://doi.org/10.1007/s11242-005-4425-z>

7. Cantwell B.J. Introduction to Symmetry Analysis. Published in the USA, Cambridge University Press, New York. 2002. 603p. ISBN-13 978-0-511-57721-5

8. Avramenko A.A., Shevchuk I.V., Abdallah S., Blinov D.G., Harmand S. Symmetry analysis for film boiling of nanofluids on a vertical plate using a nonlinear approach. *Journal of Molecular Liquids* 2016; 223: 156-164. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2016.08.038>

9. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V., Nield D.A. Instability of slip flow in a channel occupied by a hyperporous medium. *Journal of Porous Media* 2007; 10(5): 435-442. DOI: 10.1615/JPorMedia.v10.i5.20

10. Nield D.A., Kuznetsov A.V., Avramenko A.A. The Onset of Bioconvection in a Horizontal Porous-Medium Layer. *Transport in Porous Media* 2004; 54(3): 335-344. DOI: 10.1023/B:TIPM.0000003662.31212.5b

11. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V. Flow in a curved porous channel with a rectangular cross section. *Journal of Porous Media* 2007; 11 (3): 241-246. DOI: 10.1615/JPorMedia.v11.i3.20

12. Tyrinov A.I., Avramenko A.A., Basok B.I., Davydenko B.V. Modeling of flows in a microchannel based on the Boltzmann lattice equation. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics* 2012; 85: 65-72. <https://doi.org/10.1007/s10891-012-0621-1>

13. *Motamedian M., Rahmati A.R.* Analytical Solution of Non-ideal Gaseous Slip Flow in Circular Sector Micro-channel. *Journal of Heat and Mass Transfer Research* 2020; 7:131- 141. DOI:10.22075/jhmtr.2020.19129.1259

14. *Ruelle D, Takens F.* On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics* 1971; 20; 167–192. <https://doi.org/10.1007/BF01646553>

15. *Feigenbaum M.J.* Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations. *Journal of Statistical Physics* 1978; 19: 25 – 52. <https://doi.org/10.1007/BF01020332>

Отримано 16.01.2024

Received 16.01.2024

Прийнято до друку 17.08.2024
Accepted for publication 17.08.2024